单元 7：初级概率理论

特定目标：

1. 认识概率在日常生活中的用处及其重要性。
2. 学习概率的基本定律及其在实际情况的应用。

内容	时间分配	教学建议
7.1 基本定义 样本点、样本空间、等概率空间、事件的概率	3	学生虽然对本范畴部分基本概念已有认识，但因此等概念十分重要，故此教师亦应与学生重温及巩固这些知识。 学生应已熟悉概率样本空间及事件的意义，但可能对样本点不大认识，故此，教师可讨论一些如掷毫等的例子，籍此说明实验中之样本空间不是唯一的。例如，掷三枚硬币时，其中两个可能样本空间是： {(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H). (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)} 及 {全部反面，一正面，二正面，三正面} 教师应阐述等概率空间的意义。在上述的例子中，前者是等概率空间，而后者却不是。以下是另一例子： *例* 甲每天都要外出工作，他可能会遇到交通意外而丧生，不过，他遇到交通意外而丧生的机会不等于 $\frac{1}{2}$，因为两个结果 (丧生及不丧生) 均发生机会并不均等。 当学生对此概念清楚后，教师便可引导他们覆述概率的定义。 $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$ 其中 E 是事件，S 是等概率空间 教师应要强调 $0 \le P(E) \le 1$ 并讨论必然发生 ($P(E)=1$)及不可能发生的事件($P(E)=0$)。
7.2 计数法	5	教师应介绍不同的计数法，籍以运算可能结果的总数。乘法原理是其中一种，方法如下：

内容	时间分配	教学建议
		n_1 元素 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n_1}$ n_2 元素 $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_{n_2}$ $\vdots$ $\vdots$ n_r 元素 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_r}$ $(a_{j_1}, \ldots\ldots, x_{j_r})$共有 $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_r$ 种不同依次组合方式。 *例* 在某中学内，学生按其性别，年龄及所属学社被分类。假如该校有四个学社及五个年龄组别，于是共有 $2 \times 4 \times 5$ 组 $= 40$ 组。 其它计数法包括组合、排列及其有关的公式如 $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$， $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ $C_r^n = C_{n-r}^n$ 及 $C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$ 亦要清楚讨论。教师应强调组合与排列的分别。为了加深学生对计数法的认识，教师可引用更多的例子，如计算随意把 n 个球放在 n 个盒中而每一盒都有球的概率及赢取六合彩各种奖项的概率。 这里只要求学生能掌握组合及排列的基本技巧，并籍以解决一些简单问题。教师不必花费过多精力去作深入研究。 对一些能力较高的学生，教师可讨论以下公式： 在 n 个元素中，其中 p_1 个元素 (第一类) 是相似的，p_2 个元素 (第二类) 是相似的，……，p_k 个元素 (第 k 类) 是相似的，由此，它们可依次以 $\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$ 方法排列。

内容	时间分配	教学建议
		教师并可与学生讨论其它应用，如「简单超几何概率」，但学生无须认识这个术语。日常生活例子如品质检验问题和估计水池中鱼儿的数量等，亦可讨论。下列是其中两个例子。 *例一* 一批货品内有 n 台录像机，其中 r 台是次货，现随机抽出 p 台作检验 ($r < n$ 及 $p < n$)，在这里可要求学生计算有 q 台次货的概率 ($q < r$ 及 $q < p$)。 同样地，教师亦可要求学生算出当 $n = 80$，$r = 10$ 及 $p = 15$ 时最少有两台次货的概率。 *例二* 一水池有鱼 N 尾，从中捕捉了 r 尾，并于每尾身上加上记号，然后将它们放回池中；待池中所有鱼儿混在一起后，再捕捉 r 尾鱼，要计算在第二次的捕鱼样本中有 n 尾是有记号的概率并不困难。再者，教师可引导学生找出水池中鱼儿的约数。
7.3 概率定理 加法和乘法定律 互斥事件 独立事件 条件概率	3	学生学习互斥事件及独立事件的定义应该没有任何困难，而相对的加法及乘法定律即 $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ 及 $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ 亦应讨论。一些典型的例子，如掷毫、抽球及掷骰等，均可帮助学生重温此等概念。 教师应引用例子，教导学生条件概率的意义及记号。 教师现可介绍非独立事件及非互斥事件。加法及乘法的定律依次变成 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 及 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$。 $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots\ldots \cap E_n)$ 的一般公式亦可讨论。教师亦可提出 A、B 是两个独立事件当且仅当 $P(A \mid B) = P(A)$ 或 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$。

内容	时间分配	教学建议
		在处理那些只有有限结果的应用题时，树形图可有效地列出所有可能的结果。教师更应举例，以显示法则的应用。以下是其中一些例子： *例一* 甲袋中有 4 个红球及 6 个黑球,乙袋中有 6 个红球及 4 个黑球。现从甲袋中随机抽出一球 (第一球)，放在乙袋中，混合后又从乙袋中随机抽出一球 (第二球)，放在甲袋中，最后在甲袋中抽出一球 (第三球)。 在比例中，教师可要求学生计算第 1 个球是红色的概率 (i 等于 1, 2, 3)。教师亦可提醒学生使用树形图划出所有可能的结果。 *例二* 志强可在周末 (星期五、六、日) 在家中会见朋友。假设美玲在星期五探望志强的概率是 $\frac{1}{q}$，在往后的两天里，如果她在前一天已探望过志强，她再去的概率是 $\frac{1}{m}$ ；如果她在前一天探望过志强，她去的概率是 $\frac{1}{n}$。 在此例中，可行的问题包括计算美玲星期日去探望志强的概率及计算 $P(B\|A)$ 及 $P(B\|\bar{A})$ 其中 A 代表美玲星期五去探望志强，而 B 代表美玲星期日去探望志强。 教师可引导学生使用树形图找出所有可能的结果。
7.4 贝叶斯定理	4	学生熟习了条件概率后，教师可开始阐释贝叶斯定理如下： 设 Ω 样本空间分割为 $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ 互斥事件，并设 B 为男一事件而 $P(B) \neq 0$。

内容	时间分配	教学建议
		$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}=\frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$ 学生并不需要推证具叶斯定理，所以教师可引用一些数例，籍以解释当中的术语。解决有关贝叶斯定理的问题，树形图是常用的方法。以下是其中一个例子 *例* 三个罐分别放有 6 个黑球及 9 个白球，12 个黑球及 3 个白球，8 个黑球及 7 个自球。现随机选取一罐并从中抽球一个。 教师可要求学生划出树形图，及讨论如何求得黑球的概率。之后，学生应没有任何困难求出 P(从第三个罐抽得的球 | 黑球) 的值。
7.5 递推关系	4	教师须帮助学生认识先后事件相关的情况。学生应懂得列出公式，连起先后发生的事件的概率。以下的例子可帮助学生了解递推的概念： *例一* 市面上有两种新牌子的汽水。由于包装不同，某甲选择 X 汽水的概率为 0.55，选择 Y 汽水的概率为 0.45。假设她每天只饮其中一种汽水，如果她昨天饮过 X，今天饮 X 的概率是 0.6，而饮 Y 的概率是 0.4。相反地，如果她昨天饮的是 Y，今天饮 X 的概率是 0.3，而饮 Y 的概率是 0.7。 在此例中，树形图可用来显示 P_{n-1}，$1-P_{n-1}$，P_n 及 $1-P_n$ 的相互关系（P_n是她在第 n 天饮 X 的概率），由此，学生可轻易以 P_{n-1} 表 P_n，他们亦能以 P_1 及 n 来表 P_n。学生可能有兴趣知道 X 汽水最终所占市场的比例为 $\lim_{n\to\infty} P_n$。

内容	时间分配	教学建议
		例二 由一个装有 4 个白球及 9 个黑球的袋中，抽出一球，然后将它放回袋中，如是者重复 n 次。Q_n 是不会连续两次抽出黑球的概率。教师可教导学生找出 Q_n、Q_{n-1} 及 Q_{n-2} $(n \geq 3)$ 的关系，亦可要求学生写出 Q_1、Q_2 及 Q_3，然后计算 Q_4、Q_5……。 教师无须教授马可夫链及差分方程。
	19	