单元 5：数值积分

特定目标：

1. 学习梯形法则及森逊法则。
2. 应用梯形告则及森逊法则于数值积分及估计其误差。

内容	时间分配	教学建议
5.1 数值积分	1	数值积分的重要性可以从应用数学问题经常涉及导数而体会得到，而这些问题的解答亦很自然地涉及积分。学生应了解到大部分积分是不能以初等函数表示的，因此有必要估计积分值。例如很难用解析方法，求积分 $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 及 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$。 学生应知道多项式的逼近拉格朗日插值多项式方法是梯形法则及森逊法则这两条积分公式的基础。其主要观念是若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 逼近函数，则 $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。
5.2 梯形法则 **(a) 梯形法则的推导**	6	一个引起学生学习梯形法则动机的方法是求诸这方法的几何性质，即以一系列的梯形去逼近问题内的面积。利用一个已知的定积分如 $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ 可清楚说明若用足够数目的梯形，梯形法则可以计算得很好及给出很高的准确性。学生应很容易推导出用 n 个梯形对定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的梯形法则是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{w}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$ $=\frac{w}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(x_n)\right]$ 其中 $x_0=a$，$x_n=b$ 及 $w=\frac{b-a}{n}$。 另外，梯形法则也可在每一区间中以线性插值法推导出来。例如在子区间 $[x_0, x_1]$ 中

内容	时间分配	教学建议
		$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_1} p(x)\,\mathrm{d}x$ $= \int_{x_0}^{x_1}\left[f(x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) + f(x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\right]\mathrm{d}x$ $= \frac{w}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$ where $w = x_1 - x_0$ 将所有子区间的面积加起来，学生就能得出如上的梯形法则公式。
(b) 误差的估计		学生应留意以梯形法则求一已知函数的积分的准确性。教师可引导学生用以下的方法推导最大的误差。 考虑梯形法则积分的第 i 个介乎 x_{i-1} 及 x_i 的梯形，两点的距离为 $w = \frac{b-a}{n}$ 。假设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，教师可要求学生给出积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\left(= F(x_i) - F(x_{i-1})\right)$ 的准确值及计算值 $\left(= \frac{w}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\right)$。定义这个梯形的误差是 $E_i = \frac{w}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] - \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$。应用泰勒展开式在 x_i 展开 $f(x_{i-1})$ 和 $F(x_{i-1})$，学生应可发现 $E_i \approx \frac{w^3}{2} f''(\varepsilon_i)$，把所有的子区间的误差加起来，可得 最大总误差 $= \left\|E_T\right\| = (b-a)\frac{w^2}{12}M$ ，其中 $M = \max\left\|f''(\varepsilon)\right\|$ 而 ε 在积分范围内。
(c) 梯形法则的应用		教师应该强调梯形法则的应用。常见例子如面积、可变力的作功及质点以给定速度运行的距离，皆可向学生加以说明。以下是一些可行的例子。

内容	时间分配	教学建议

<table>
<tr><th>内容</th><th>时间分配</th><th>教学建议</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

例一

在下表中列出的是一条曲线上的一些点。(t 是进行时间，v 是速度)。教师可要求学生计算 $t = 0$ 至 $t = 4.0$ 所行的距离。

<table>
<tr><td>t (h)</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1.0</td><td>1.5</td><td>2.0</td><td>2.5</td><td>3.0</td><td>3.5</td><td>4.0</td></tr>
<tr><td>v (kmh^{-1})</td><td>23</td><td>20</td><td>15</td><td>11</td><td>12.5</td><td>15</td><td>18</td><td>20</td><td>22</td></tr>
</table>

例二

利用梯形法则及四个等距的纵坐标估计 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 的值。答案准确至三位有效数字。

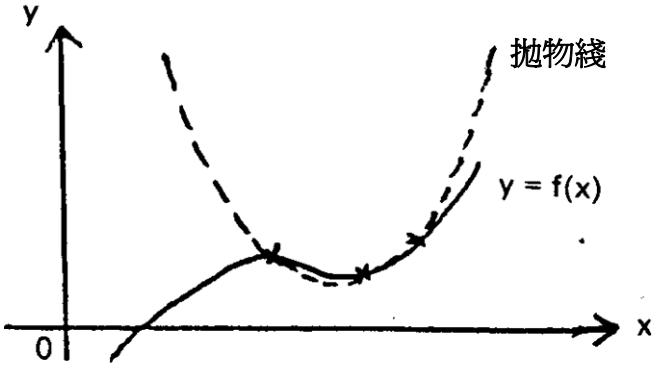
例三

计算 $\ln 2$ 准确至小数后四个位需要多大的区间?

例四

利用梯形法则计算积分 $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 准确至 0.001 并与真值核对答案。

</td></tr>
<tr><td>**5.3 森逊法则**
(a) 森逊法则的推导</td><td>6</td><td>教师可用二次拉格朗日插值多项式推导森逊法则，唯应强调其几何意义。学生应发觉用一系列的抛物线段逼近函数 $y = f(x)$ 一般来说比用直线更能紧密配合。</td></tr>
</table>

内容	时间分配	教学建议
		 教师可引领学生利用 $2n$ 条条子推导森逊法则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{w}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+f(x_{2n})\right]$ 其中 $x_0=a$，$x_n=b$ 及 $w=\frac{b-a}{n}$. 教师应提醒学生应用森逊法则时的子区间必定是双数，但梯形法则没有限制的。
(b) 误差的估计		与梯形法则相似，森逊法则的截断误差亦可用泰勒展开式导出，而误差的假设就如以往一样。在教师的辅导下导出最大误差项 $\lvert E_T\rvert=(b-a)\frac{w^4}{180}M$ 其中 $w=\frac{b-a}{2n}$ 及 $M=\max\lvert f^{(4)}(\varepsilon)\rvert$ 而 ε 在积分范围内，对学生来说虽然比较繁复，但亦不太困难。
(c) 森逊法则的应用		基本上，应用问题的类形与梯形法则的相似。在这里要强调的不单在应用技巧本身，并应比较两公式的准确程度。下面是两个例子。

内容	时间分配	教学建议
		例一 利用森逊法则计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$。计算最少的条数数目使误差少于 10^{-6} 。 *例二* 利用梯形法则及森逊法计算积分值 $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 并与真正结果比较其准确性。
	13	

.