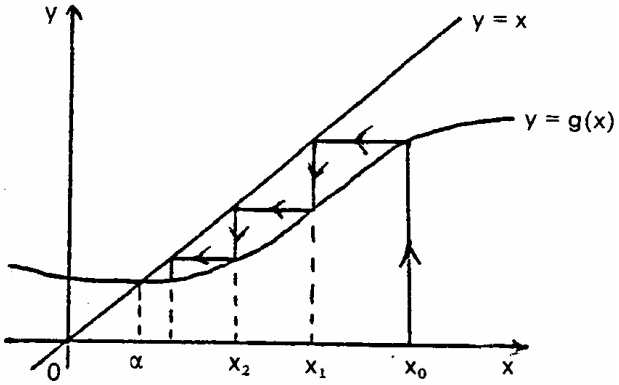
单元 6：方程的数值解

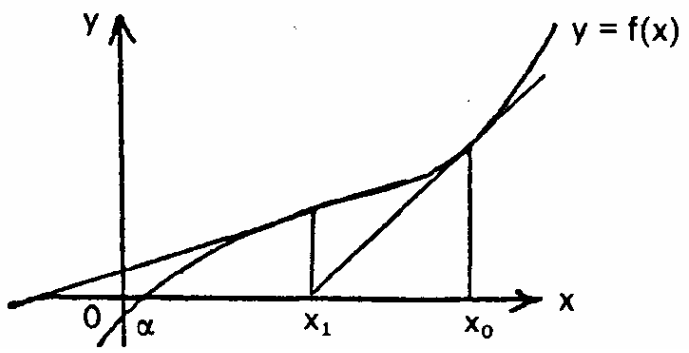
特定目标：

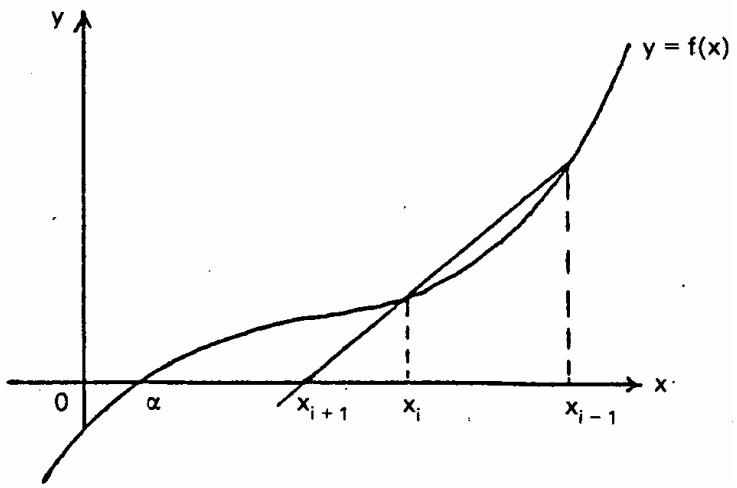
1. 学习定点迭代法、牛顿方法、正割法及试位法。
2. 学习应用适合的方法寻找方程近似根的技巧及计算其误差。

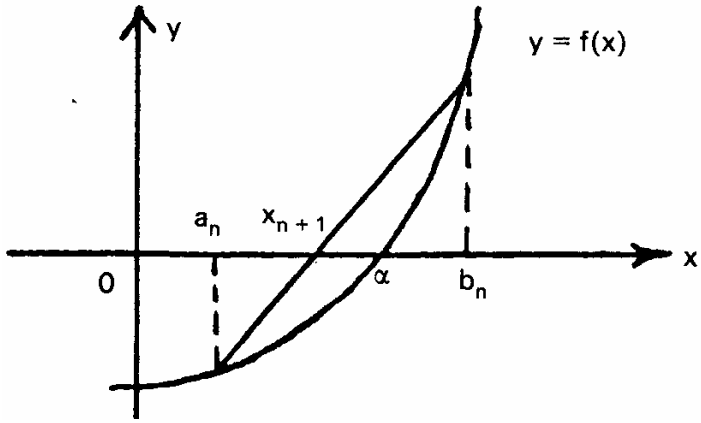
内容	时间分配	教学建议
6.1 定点迭代法 (a) 迭代法的算法	7	在科学和工程学上，很多时候都要求取方程 $f(x)=0$ 的根。对于二次、三次或四次的方程，其根的真确值可透过代数方法得出。若多项式 $f(x)$ 的次数大于 4 或 $f(x)$ 是一超越函数如 $e^x-4\cos x$，他们的根一般都不能用代数方法求得。因此我们可利用数值方法求根的近似值。 学生应了解应用这方法时的几个步骤。 1. 把方程 $f(x)=0$ 重新整理成 $x=g(x)$ 的形式而 $g(x)$ 称为迭代函数。 2. 当须要时基于适当的图形草图作出初始估值 x_0。 3. 代入方程如下，由此得到数列 $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots, \alpha$ $x_1=g(x_0)$ $x_2=g(x_1)$ $x_3=g(x_2)$ $\vdots \quad \vdots$ $x_i=g(x_{i-1})$ $x_{i+1}=g(x_i)$ $\vdots \quad \vdots$ 希望得到一个定点 α 使 $\alpha=g(\alpha)$。

内容	时间分配	教学建议
		4. $f(x)=0$ 的近似解便是定点 α。 教师可以一些有收敛的迭代函数及有适当的初始估值的方程来说明此方法。教师并应与学生讨论这个方法的几何意义。 
(b) 收敛的条件		利用一个如 $x^2-5x+4=0$ 及 $g(x)=\dfrac{x^2+4}{5}$ 的迭代函数作为例子，教师可要求学生以 $x_0=2$ 及 5 为初始估值求解。学生应求出若 $x_0=2$，他们求出的根近于 1，但若 $x_0=5$，求解的过程是散发的。因此讨论收敛性变得很自然了。这里很值得讨论单调及振动收敛和散发性的几何意义，但数学处理方面则只须简要地提及。 收敛性的数学处理，一般必须利用中值定理。学生应知道应用定点迭代算法必须符合下列各点。 1. $g(x)$ 在区间 $I=[a, b]$ 内所有 x 点上有定义及 $g(x)$ 在 I 内。 2. 迭代函数 $g(x)$ 在 I 上是连续的。

内容	时间分配	教学建议
		3. 迭代函数 $g(x)$ 在 I 上是可微分的及对所有在 I 内的 x 来说，存在一个实数 K 使得 $\lvert g'(x)\rvert \le K < 1$。 教师可以举出类似以下的证明练习。 *例* 给出 $x = g(x)$ 有一个准确解 α 在 $[a,\ b]$ 内及对所有 x 在 $[a,\ b]$ 内有 $\lvert g'(x)\rvert \le K$ 。进一步假设 $x_{n+1} = g(x_n)$ 其中 $a \le x_n \le b$，$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ 。教师可要求学生证明 $\lvert x_{n+1} - \alpha\rvert \le K^{n+1}\lvert x_0 - \alpha\rvert$ 及推出若 $K < 1$，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 α。
(c) 误差的估计		教师应与学生讨论及推导第 n 个近似解 x_n 的误差 ε_n，其中 $$\varepsilon_n = \lvert x_n - \alpha\rvert \le \frac{K^n}{1-K}\lvert x_1 - x_0\rvert。$$ 从式中可以看出当 K 越小，收敛速率越快。对能力较高的学生，教师可利用在定点 α 以泰勒展开式展开误差 $\varepsilon_{n+1} = g'(\alpha)\varepsilon_n + g''(\alpha)\frac{\varepsilon_n^{\ 2}}{2!} + g'''(\alpha)\frac{\varepsilon_n^{\ 3}}{3!} + \cdots$，并与他们讨论迭代法的收敛阶，但不应尝试用严格的数学处理方法。
6.2 牛顿方法 (a) 牛顿方法的算法	5	教师可以用几何方法推导此算法。

内容	时间分配	教学建议
		 此外，亦可以利用泰勒展开式在 x_n 点展开 $f(x_{n+1})$ 而推导得 $f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f''(x_n)\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{2!}+\cdots\cdots$ 当 $x_{n+1}\to\alpha$ 及 $x_{n+1}-x_n\to 0$。 学生应得出 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$。学生必须知道牛顿方法事实上是定点迭代法的一个特例。
(b) 收敛条件及误差计算		牛顿方法的收敛条件与一般定点迭代法是相同的。比较牛顿方法与一般定点方法的收敛率是一个有趣的讨论题目。学生不难发觉若 α 是一个单根，则 $g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ 及 $g'(\alpha)=0$，和 $\varepsilon_{n+1}\approx g''(\alpha)\frac{\varepsilon_n^{\ 2}}{2!}$。牛顿方法比其它方法超越的

内容	时间分配	教学建议
		例子是应该列举的。以下是一个例子。 *例* 用迭代公式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n^{\ 3})$ 求方程 $x^3+2x-1=0$ 在区间 [0, 0.8] 内的根。教师可要求学生用初始值 $x_0=0$ 去求 α，然后再用牛顿方法重做此问题。最后要求学生说明后者的收敛速度比前者快。 明了「若 α 是重根，则牛顿方法并不快速收敛」这一事实对学生是有神益的。要使学生对牛顿方法作更全面的学习，教师应与学生讨论此方法的缺点。
(c) 牛顿方法的应用		高于 2 次的高次方程和超越方程的问题是切合课程的。例如求方程 $2x^3+x^2-20x+20=0$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 之间的根准确至 10^{-6} 及推导求 a 的第 k 个根的牛顿式 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^{\ k}-a}{kx_n^{\ k-1}}$ 是一般常用的问题。
6.3 正割法	2	正割法是求 $f(x)=0$ 的根的另一方法。它的收敛速度与牛顿方法差不多，但回避了导数 $f'(x)$ 的计算。此方法是用割线取代了切线。
(a) 正割法的推导		此方法的算法推导是近似于牛顿方法般借助于几何直观。 

内容	时间分配	教学建议
		类似的公式是 $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$，而其中以割线的斜率 $\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ 代替切线的斜率 $f'(x)$。 学生应看出割线方法是需要两个初始估值而它们的函数值是不需要是异号的。 这里并不需要进一步处理误差估计和收敛速率，但若计算时需要，则有关的公式亦应在问题中给出。
(b) 正割法的应用		练习与牛顿方法的相似。
6.4 试位法	2	这也是一个求方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,\ b]$ 内的根的方法。此法与分半法 (学生已在中五时学习) 相似的地方是两方法皆能确定更小的含根区间，同时试位法与正割法在求新的迭代值方面也十分相似。
(a) 试位法的推导		假设方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a_n,\ b_n]$ 内有根及利用下图  教师可引导学生计算连接两点 $(a_n, f(a_n))$ 及 $(b_n, f(b_n))$ 之直线的 x 轴截距。若设 x 轴截距值为 x_{n+1}，学生会发现 $x_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$ 或 $x_{n+1}=b_n-\dfrac{f(b_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$。

内容	时间分配	教学建议
(b) 试位法的应用		学生可依据下列情况 (1) 若 $f(x_{n+1})f(a_n)<0$，则令 $a_{n+1}=a_n$ 及 $b_{n+1}=x_{n+1}$， (2) 若 $f(x_{n+1})f(a_n)>0$，则令 $a_{n+1}=x_{n+1}$ 及 $b_{n+1}=b_n$ 去决定新的含根区间，他们便很容易完成该算法的推导。 教师应提醒学生试位法需要两个初始值及在这两个初始值上的函数值必为异号，才能应用试位法。类似牛顿方法及正割法的练习也适合作为试位法的练习。下面是一些例子。 *例一* 证明方程 $x^3+3x-12=0$ 在区间 $[1,\ 2]$ 内有唯一根并利用试位法求此根，答案准确至三位小数。 *例二* 现用试位法求方程 $x^3=2x+5$ 在区间 $[2,\ 3]$ 内的根。 证明迭代值序列 $\{x_i\}$ 的公式为 $x_{i+1}=3-\dfrac{16x_i-48}{x_i^3-2x_i-21}\quad i=1,2,3,\ldots\ldots$ 由此，求此根，准确至四位有效数字。 如教授正割法一样，教师不宜与学生讨论深入的收敛及误差估计问题。
	16	