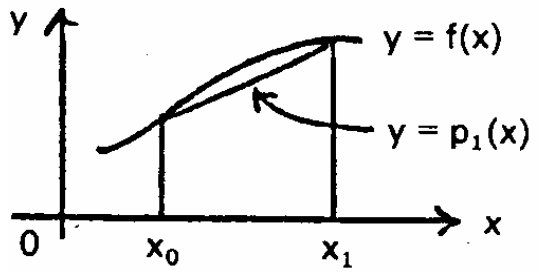
单元 3:　插值法及拉格朗日插值多项式

特定目标：

1. 学习插值法的概念。
2. 学习拉格朗日插值多项式。
3. 应用拉格朗日插值多项式逼近函数及估计误差。

内容	时间分配	教学建议
3.1　插值法及插值多项式	1	学生应要认识插值的意义。 插值法是利用自变量 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的函数值 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ 估计函数在 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 之间的数值。 学生应知道多项式逼近函数是数值法最常用的一种。利用多项式 $p(x)$ 替代函数 $f(x)$ 是因为多项式容易计算，它只涉及整数幂；而其导数及积分本身又为多项式，并不难求得；况且多项式方程的根亦很容易确定。
3.2　拉格朗日播值多项式的构造	3	作为引入，教师可展示拉格朗日插值多项式 $p_n(x)$ 在 $n = 1$ 的情形。以下的图解可帮助学生了解插值法的实际意义。  学生应了解他们只是要求利用 $p_1(x) = a_1x + a_0$ 于 x_0 及 x_1 之间逼近曲线 $y = f(x)$。 明显地 $p_1(x_0) = f(x_0)$，$p_1(x_1) = f(x_1)$ 及 $p_1(x) = a_1x + a_0$。

<table>
<tr><th>内容</th><th>时间分配</th><th>教学建议</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>所以 $p_1(x)-a_1x-a_0=0$
$f(x_0)-a_1x_0-a_0=0$
$f(x_1)-a_1x_1-a_0=0$.
消去 a_0 及 a_1 后可获得
$$p_1(x)=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$
同样地，教师可利用类似上间进行推导三次拉格调日插值多项式及得到
$$p_2(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$
以类似的方法教师可以推导三次多项式。为了学生的兴趣，教师也可以引入「拉格朗日乘数函数」。
最后教师可帮助学生引出 $p_n(x)$，$n=1,2,3$ 的次数是 n 及在 $n+1$ 个表列点到 x_i 上，$p_n(x_i)=f(x_i)$ 的结论，但不须要将其引伸至一般情况。</td></tr>
<tr><td>3.3 拉格朗日插值多项式的应用</td><td>2</td><td>教师应展示拉格朗日插值多项式的应用例子。

例一
下表列出在 0, 1, 2, 4 点上的四个函数值。
<table><tr><td>x_k</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>y_k</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>
教师可要求学生证明三次拉格朗日插值多项式为 $p_3(x)=\frac{1}{12}(-x^3+9x^2-8x+12)$。更可要求他们计算介乎 $x=0$ 及 $x=4$ 间的一些函数值。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>内容</th><th>时间分配</th><th>教学建议</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

例二

利用下表之数据

<table>
<tr><td>v</td><td>10</td><td>15</td><td>22.5</td><td>33.75</td><td>50.625</td><td>75.937</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0.300</td><td>0.675</td><td>1.519</td><td>3.417</td><td>7.689</td><td>17.300</td></tr>
</table>

学生可应用不同次的拉格朗日插值多项式计算对应 $v = 21$ 的 p 值。(当 $n = 1$，$p = 1.350$ 及当 $n = 2$，$p = 1.323$)，通过这例子，学生应能了解利用相同数目但不同的邻近点也会得出不同的结果。

作为进一步的说明，一些常用函数如正弦及余弦函数是值得作为课堂上示范的。教师可要求学生将利用拉格朗日插值多项式估计的中间函数值与由计算器算得的数值作一比较。教师亦可举出一些实际例子如经济走势图表及人口数据表并要求学生估计其中缺掉的一些数据。

</td></tr>
<tr><td>**3.4 插值各项式的误差估计**</td><td>3</td><td>

在此阶段，教师应提醒学生拉格朗日插值多项式只是多项式插值法的一种，实际上还存在其它插值方法。对一些能力高的学生，教师可与他们讨论插值多项式的唯一性。

在开始讨论误差估计时，教师可引入函数 $\pi(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，并以之用作表达 $f(x_i)$ 的系数 $\dfrac{\pi(x_i)}{(x-x_i)\pi'(x_i)}$，因而给出拉格朗日插值多项式的简洁式如下：

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\pi(x_i)}{(x-x_i)\pi'(x_i)},\ n = 1, 2, 3.$$

将误差定义为 $e(x)=f(x)-p_n(x)=C\pi(x)$ 其中 C 为常数，由此建立函数 $F(x)=f(x)-p_n(x)-C\pi(x)$，选择 $x=\bar{x}$ (其中 $x_0\le\bar{x}\le x_n$ 及 $\bar{x}\ne x_i$，$i = 0, 1, 2, 3$)，教师可引导学生重复应用洛尔定理而达至

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x)$$ 其中 ξ 位于表列区间之内。

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>内容</th><th>时间分配</th><th>教学建议</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>学生应了解若 ξ 在包含表列点的区间内及 $f^{(n+1)}(\xi)$ 有上限，如 $M=\max\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$，则绝对误差为
$\left|e(x)\right|\le\left|M\dfrac{\pi(x)}{(n+1)!}\right|$。
教师应提供示范的例子，以下是其中的一个。

例
给出函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 的函数表。

<table><tr><td>x_k</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y_k</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>
教师可要求学生证明 $\left|e(x)\right|\le\left|\dfrac{\pi^3}{8}x(x-1)(x-2)\right|$，然后计算在 $x=0.5$ 时的估计值及与真实误差作一比较。</td></tr>
<tr><td></td><td>9</td><td></td></tr>
</table>