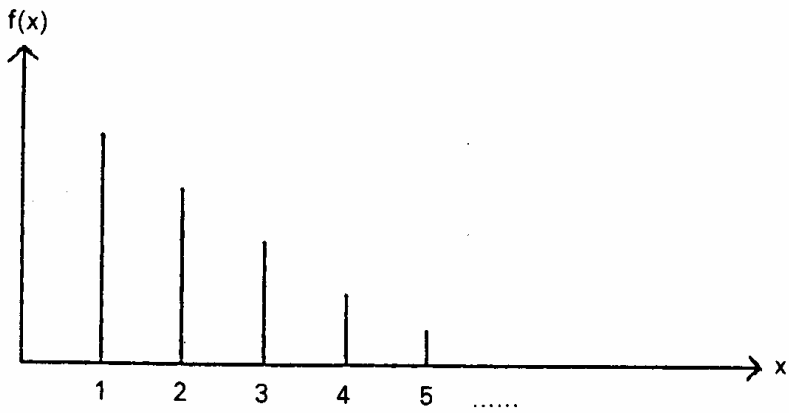
单元 9： 随机变量、离散及连续概率分布

特定目标：

1. 能够求出离散和连续概率分布的期望值及方差。
2. 学习二项分布和常态分布及其日常应用。
3. 认识独立常态变量线性组合的性质。

内容	时间分配	教学建议
9.1 随机变量 (a) 离散概率函数	6	教师可用简单的例子介绍随机变量，如掷毫 (间断随机变量) 及电灯泡的寿命 (连续随机变量)，使学生对此有一初步的认识。 教师可用掷两枚硬币的例子介绍离散概率函数 $f(x)$ 为 $f(x)=P(X=x)$，其中 X 是一个离散随机变量，x 是一个随机变量的数值。 $$f(x)=\begin{cases}0.25 & x=0\\ 0.5 & x=1\\ 0.25 & x=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ X (掷得正面的数目) 是一个离散随机变量，其数值可等于 0、1 或 2。 教师须强调以下的情况： $$f(x)\geq 0 \text{ 及 } \sum f(x)=1$$ 同时亦要提醒学生，大楷 X 是随机变量的记号，而小楷 x 是随机变量的可能数值。 以下是另一离散随机变量的例子。 *例* 掷一骰时，X 为投到六点的次数。 它的离散概率函数 $f(x)$ 是 $$f(x)=P(X=x)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\text{。}$$

内容	时间分配	教学建议
(b) 概率密度函数		明显地，$\sum f(x)=\sum_{x=1}^{\infty}P(X=x)=\dfrac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}}=1$ 以线条图或组织图来表示离散概率函数，更能帮助学生了解此概念。  在此阶段，学生应已相当了解离散概率函数，教师可将此概念伸延至连续随机变量，从而介绍连续概率密度函数 (p.d.f.) $f(x)$。学生须留意： $f(x)\geq 0$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 学生须知道一个连续随机变量 X 可取某一特定范围内的任何数值，而它和 p.d.f. $f(x)$ 的关系可用以下的公式表示： $P(a\leq X\leq b)=\int_{a}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$ 事实上，p.d.f. 的图表，可用统计学上连续数据的频率曲线来说明。

内容	时间分配	教学建议
		此外，学生亦应注意 $P(X=a)=0$ 及 $P(a \le X < b) = P(a < X < b)$ $= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$ 以下是一些有关的例子： *例一* (矩形分布) X 的概率密度函数定义为 $f(x)=\begin{cases} k & 0<x\le 4 \quad k \text{ 是常数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 从 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ 可找出 k 的数值。 同时 $P(-2 < X \le 1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 及 $P(X \ge 3) = 1 - \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ 假设 $\mathrm{P}(X \le M) = b$，教师可要求学生以 b 表 M。他们亦应注意到当 $b = 0.5$ 时，M 是中位数。 *例二* 某班机预期在早上八时正到达香港，但它实际到达的时间为早上 $(8 + X)$ 时，X 是一个随机变量，其概率密度函数是 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3(4-x^2)}{32} & -2<x<2 \\ 0 & \end{cases}$ 教师可要求学生找出这班机在早上七时至八时，及在早上九时至十时到达的概率。 教师应与学生讨论累积分布函数中 $\phi(t)$ 的意义。

内容	时间分配	教学建议
		离散情况： $\phi(t)=\sum_{x\le t} f(x)$ 连续情况： $\phi(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ 以下的例子，可帮助学生了解上述两种情况： 1. *离散情况* 在掷二粒骰子时，其总和大过 10 的概率为 $1-\phi(10)$。 ($\phi(10)$ 是其总和等于或少于 10 的概率。) 2. *连续情况* 假设 $\phi(a)$ 代表一电灯泡的寿命少于 a 的概率，于是 $P(X<a)=\phi(a)$， $P(a<X<b)=\phi(b)-\phi(a)$ 及 $P(X>a)=1-\phi(a)$。
9.2 预期值及方差	5	教师可与学生重温平均值及标准差的意义及其具体效用，从而帮助他们了解期望值的概念。教师可用以下的简单例子，来阐释此等概念。 *例* 某人赢取奖金 $x=\$200$ 的概率为 $p=0.01$，则他的机会应值 $px=(\$200)\cdot(0.01)=\$2$。教师可将此概念伸延至 X 的 n 个离散值。 教师应定义离散随机变量及连续随机变量的期望值。(即 $E(X)=\sum px$ 及 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$。) 教师亦可讨论函数的期望值的定义。以下是两个定义。 当 X 是离散随机变量，$E\left[g(X)\right]=\sum pg(x)$ 当 X 是连续随机变量，$E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

内容	时间分配	教学建议
		在离散随机变量方面，学生应知道 $E(X)$ (= μ) 及 $E\left[(X-\mu)^2\right]$ (= $\mathrm{Var}(X)$ = σ^2)。教师应特别指出 μ 是集中趋势的量度，而 σ^2 则是离差的量度。 以下的例子可供参考。 *例* 在每一次考试中，甲考生的合格概率是 0.4。如果他不合格，他会继续参加考试，直至合格为止，而每次考试须付费用 \$120。教师可与学生计算此考生考获合格的预期费用。 与日常生活有关的例子如公平博奕及计算预计盈亏等可帮助学生了解，以下是其中两个例子。 *例一* 在一项投资中，甲有 0.62 的机会赚取 \$5000，和 0.38 的机会亏损 \$8000。 学生可从以下的公式计算 $\mathrm{E}(X) = \mu$ 及 $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ $\mu = \$(5\,000)\,(0.62) + \$(-8000)\,(0.38) = \$60$ $\sigma^2 = (5000 - 60)^2\,(0.62) + (-8000 - 60)^2\,(0.38)$ μ 是期望增益。 *例二* 一部角子机共有四个窗，每一个窗都会显出红、橙、黄或蓝色，而每种颜色出现的机会是均等的，同时亦不受其它窗所显示的颜色影响。甲每次投入 \$$a$，若四个窗所显示的颜色全不相同，则他会得到奖金 \$5；若四个窗所显示的颜色完全相同，则奖金为 \$30。在上述两种情况外他都算输。\$$X$ 是他在某一次赌博中所得的款项。 在此例中，教师可与学生讨论以下问题： 1. 当 $E(X)=0$，这游戏是一场公平搏奕。那么，游戏的合理价线 (即 \$$a$) 是多少？

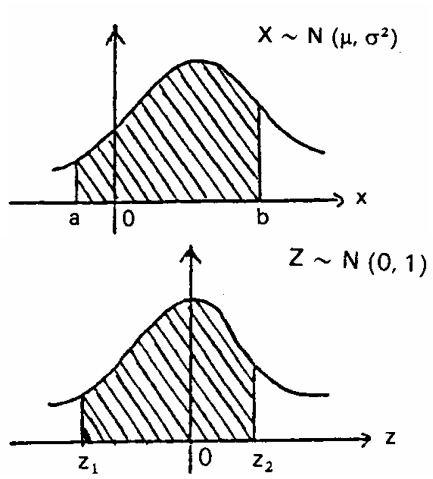
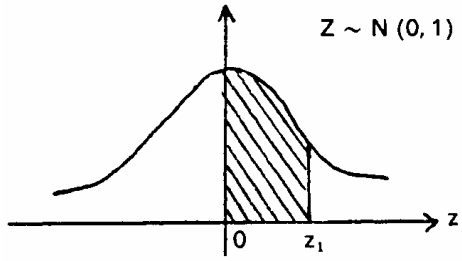
内容	时间分配	教学建议
		2. 假设 $a=1$，$E(X)$ 及 $\mathrm{Var}(X)$ 是多少 ？ 学生须认识在大多数赌博中，$E(X)<0$。教师亦可要求学生计算当甲每次投入的钱加倍时新的 及 ，并找出新与旧参数的关系。若学生程度较佳，教师可着学生估计 $E(Y)$ 的数值其中 $\$Y$ 是甲玩了两次角子机所赢得的款项。 在计算一些有关连续随机变量时，教师应引用例子，清楚列明计算 $E(X)$ 及 $\mathrm{Var}(X)$ 的步骤。 *例* 某一快餐店每天所需的橙汁数量是一个连续随机变量 x，其概率密度函数 $f(x)$ 的形式如下： $f(x)=\begin{cases} ax(b-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它 here} \end{cases}$ 每天所需橙汁的平均数为 0.625 单位。教师可用以下的公式计算 a 及 b： $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x=0.625$ 盛载橙汁的容器总容量为 0.8 单位，每天早上，此容器均给注满。 假设在某一天，橙汁存量供不应求的概率为 p，p 可根据以下公式求得： $P=1-\phi(0.8)=\int_{0.8}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 对一些程度较佳的学生而言，教师应引导他们去证明以下两条公式： $E\left[ag(X)+b\right]=aE\left[g(X)\right]+b$ 及 $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$ 其中 a 与 b 均是常数。 此外，一般学生应能证明 $E\left[g(X)+h(X)\right]=E\left[g(X)\right]+E\left[h(X)\right]$

内容	时间分配	教学建议
		及 $\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\mu^2$ 教师可用以下的例子来解释上述公式的应用。 *例* 假设 $Z=2X^2-3X+5$，其中 X 是一随机变量，其平均值为 μ，方差为 σ^2。$E(Z)$ 可从以下的公式计算出来。 $E(Z)=E(2X^2-3X+5)$ $=E(2X^2)-E(3X)+E(5)$ $=2\left(\mu^2+\sigma^2\right)-3\mu+5$
9.3 二项分布 (a) 伯努利试验 二项概率	7	教师可引用已熟习的掷毫例子来介绍伯努利试验，并强调在伯努利试验中，只有两种可能的结果。 重复的伯努利试验，在概率学及统计学上担当一个重要的角色，尤其是当此两种可能结果，在每一次试验中的概率是相等的时候。学生应知道在 n 次试验后，共有 r 次成功的概率为： $P(r\text{ 次成功 successes})=C_r^n p^r q^{n-r}$ 教师可引用更多的日常例子，来阐释二项概率。 *例一* 掷一粒骰子 n 次，为使得到至少一个「六」的机会大过 0.99，n 须符合以下的不等式： $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0.99$ *例二* 随机将 r 个球分布在 n 格内。教师可要求学生计算在某一指定格内放存 k 个球 $(k\le r)$ 的概率 P_k。 在此例中，学生须知道 $P_k = P$ (在 r 次伯努利

内容	时间分配	教学建议
		试验中有 k 次成功事件)，而 $p=\frac{1}{n}$。
(b) 二项分布		此时，教师可介绍二项分布可视作一个重复的伯努利试验，而其成功的概率是相等的。此外亦可介绍这分布的记号 $B(n, p)$。 学生须认识二项分布的公式，$E(X)=np$ 及 $\mathrm{Var}(X)=npq$。 教师可利用不同 n 及 p 的数值，来显示二项分布的概率图表。学生应可观察到当 $p = q = 0.5$ 时，此图表是对称的。对能力较高的学生，教师亦可讨论二项分布的众数。
(c) 应用		二项概率分布可用于很多实际的事件中，以下是三个例子。 *例一* 在某项测验中，共有 4 条选择题，每题均有 5 项选择。甲参加了是项测验；以他所学的知识，他每条选中正确答案的概率为 0.7；若他只是瞎猜，则选中正确答案的概率是 0.2。甲做了全部问题。 在上述例子中，甲只知道其中 3 题的正确答案的概率是 $C_3^4(0.7)^3(0.3)$。 由于甲只是瞎猜也可能得到正确答案，所以 P(正确答案) = p 可在以下两种情况计算出： (a) 他确实懂得此题； (b) 他只是瞎猜得到的答案。 假设 X 是所选正确答案的数目，教师可要求学生计算 $E(X)\,(=4p)$，$\mathrm{Var}(X)\,(=4p(1-p))$ 及 $\mathrm{P}(X=1)(\ =C_1^4p^1(1-p)^3)$。

内容	时间分配	教学建议
		教师可提出以下问题： 1. 答对一题得两分，答错一题拍一分。假设甲得 Y 分，计算 $E(Y)$ 及 $\mathrm{Var}(Y)$。 2. 假设甲只知道其中 3 题的正确答案，他得满分的概率为何? 3. 假设他只选中一个正确答案，他由于瞎猜而得出此答案的概率为何? *例二* 一批灯泡中有 5% 是次货。现要根据以下的规则，测验一批灯泡。 (a) 测试其中 10 个灯泡的样本。 (i) 若有两个或以上的灯泡是次货，则退回整批货。 (ii) 若在此样本中没有次货，则接受整批货。 (iii)若只有一个次货，则进行以下 (b) 的测试。 (b) 再测试另外 10 个灯泡的样本。若在今次测试中没有次货，则接受整批货，否则退回。 若有 X 个的灯泡接受测试，则要找出 $P(X = 20) = 10(0.95)^9(0.05)$ 及 $P(X = 10) = 1 - 10(095)^9(0.05)$ 并不困难。教师亦可要求学生计算 $E(X)$ 及 $\mathrm{Var}(X)$。 *例三* 一机器所生产的货物有 10% 是次货。所有货物先放在一大盒内，由每盒抽出 n 件货物测试。若没有次货，则接受整批货，否则退回。 为使退货的概率最小是 0.95，n 之最低值必须符合 $(0.9)^n < 1 - 0.95$ 。若 $n = 10$，则 P(接受货物) $= (0.9)^{10} = p$。

内容	时间分配	教学建议
		在 8 盒被测试的货物中，有 5 盒被退间的概率是 $C_3^8 p^3(1-p)^5$。
9.4 常态分布 (a) 基本定义	10	常态分布是一个十分重要的连续概率分布例子。教师只须写下 p.d.f. $f(x)$ 的公式，但不用详加解释。 $$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$ 学生只须认识到 $E(X)=\mu$ 及 $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，而无须予以证明。 教师亦可与学生讨论常态分布被广泛使用的原因。 1. 容易运用； 2. 可作为其它分布的近似分布。 教师可介绍由不同 μ 和 σ 所作的图表，学生应认识所有图表均是钟形，并对 $x=\mu$ 对称。教师可介绍 $N(\mu, \sigma^2)$ 是常态分布的记号，其中μ 为平均值及 σ^2 为方差。
(b) 标准常态曲线和常态表的使用		常态分布运算跟 μ 及 σ 有莫大关系。学生应发现如以不同的参数来表列不同的常态分布概率函数并不容易。因此，有必要以标准单位 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 作变换。学生应不难得知 $E(Z)=0$，$\mathrm{Var}(Z)=1$ 及 $$\begin{aligned}P(a<X<b)&=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\\&=P(z_1<Z<z_2)\end{aligned}$$

内容	时间分配	教学建议
		下列图表，可帮助说明以上的概念。  有阴影部分的面积相等 在下图中，阴影部分的面积是 $P(0<Z<z_1)$  以不同的 z_1 值计算出来的面积以表形式列出，称为常态分布表 (此表只列到 z_1 = 3.59 的数值)。学生须多加练习，才可正确地使用此图表。 *例* X 是 $N(8, 4)$ $P(6<X<9)=P\left(\frac{6-8}{2}<\frac{X-8}{2}<\frac{9-8}{2}\right)$ $=P(-1<X<0.5)$ $=P(0<Z<1)+P(0<Z<0.5)$

内容	时间分配	教学建议
(c) 应用		$P(X>9)=P(Z>0.5)=0.5-P(0<Z<0.5)$ 若 $P(X<k)=0.87$，则可用线性插值法准确地计算 k 值。 教师可提醒学生在解决此类问题时，可利用对称性及互补概率。此外，若 z_1 值超过三位有效数字时，应采用线性插值法。 在日常应用中，标准常态分布是非常重要的。教师应提供足够的例子说明。下列的例子可供参考。 *例一* 某生产商用机器生产电阻。他发现其中 10% 的电阻少于 95Ω，同时，其中 20% 是超过 110Ω。电阻 X 是属于常态分布。 可由以下两条公式求得μ 及 σ： $P(X<95)=P\left(Z<\frac{95-\mu}{\sigma}\right)=0.1$ $P(X>110)=P\left(Z>\frac{110-\mu}{\sigma}\right)=0.2$ *例二* X 是一支杆的长度，它是一个常态分布的随机变量，其平均值为 μ，方差为 1。若 X 不符合某些标准，生产高便会蒙受损失。假设利润 M (每支杆计) 是 X 的函数如下： $M=\begin{cases}3 & 8\le X\le 10\\ -1 & X<8\\ -5 & X>10\end{cases}$ 预期的利润 $E(M)$ 为 $E(M)=8\phi(10-\mu)-4\phi(8-\mu)-5$， 其中 $\phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$ 是累积概率函数。

内容	时间分配	教学建议
		假设可调节生产过程而使 μ 的值改变，则相对于最大利润的 μ 值可从 $E(M)$ 对 μ 的导数中求得。 *例三* 一工厂生产樽装汽水，每樽容量为 1.25 L。但是，由于自动入樽机的偏差，每樽所含的汽水容量会随常态分布而改变。据观察所得，其中 15% 的汽水容量少于 1.25 L，而其中 10% 容量超过 1.30 L。 学生应可求得容量分布的平均值 μ 和标准偏差 σ。 生产一樽有 x L 汽水的成本（以仙计）为 $C=36+62x+5x^2$ 其中 x 是以上分布的随机变量。 每樽汽水的预期成本是 $E(C)$，其中 $E(C)=36+62\mu+5\left(\mu^2+\sigma^2\right)$。 20 000 樽汽水的预期成本是 $20\,000E(C)$。
(d) 逼近常态分布的二项分布		学生应清楚知道只有当 n 的数值大时，才可用常态近似法来计算二项概率。在此情况下，平均值及方差分别为 np 及 npq。此外，教师亦须提醒学生在这近似计算时必须作末端的校正。 *例* 掷一枚硬币 400 次。 若 X 是所得正面的次数，则 X 是 $B(400, 0.5)$。用常态近似法，它是 $N(200, 100)$。 $P(195 \le X \le 210) = P\left(\frac{194.5-200}{10} < Z < \frac{210.5-200}{10}\right)$ 学生会有兴趣知道： $P(195 \le X \le 210) \ne P(195 < X < 210)$

内容	时间分配	教学建议
9.5 独立常态变量的线性组合	6	学生应认识到独立常态变量的纯量倍数和亦是常态。由此，学生不难推论： 若 X 及 Y 是两个独立常态变量，且 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ 及 $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，则 $aX + bY \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\right)$ 而 a、b 是任意实数。 以上结果可轻易伸展至 n 个独立常态变量。教师可举例说明以上事实在日常生活中的应用。 *例一* 蛋糕以六个一袋出售。每一块蛋糕的质量是常态变量而其平均值为 25 g 及标准差为 2 g。包装蛋糕的物料质量亦是常态变量而平均值是 30 g 及标准差是 4 g。求每袋蛋糕总质量的分布及由此求出每袋蛋糕的总质量小于 142 g 的概率。 *例二* 平装书的厚度，A cm，是常态分布，其平均值为 2 cm 及方差为 0.63 cm^2。精装书的厚度，B cm，亦是常态分布而其平均值为 5 cm 及方差为 1.42 cm^2。学生不难求得 $X = 2A - B$ 的分布；由此，可用常态分布表求得一随机选择的平装书厚度小于一随机选择的精装会厚度的一半的概率。
	34	